# Неопределенный интеграл

## Простейшие свойства неопределенного интеграла, основные методы вычисления

**Определение 1.** *Пусть функция $f$ определена на интервале $(a, b)$. Функция $F$ называется первообразной (функцией) для функции $f$ на промежутке $(a, b)$ (конечном или бесконечном), если выполнено равенство $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$.*

**Теорема 1.** *Если $F_1$, $F_2$ — две первообразные для $f$ на $(a, b)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$ при всех $x \in (a, b)$.*

*Доказательство.* Заметим, что $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$, следовательно, $(F_1(x) - F_2(x)) = C$ при всех $x$ из $(a, b)$ (следствие из теоремы Лагранжа). □

**Определение 2.** *Неопределенным интегралом от функции $f$ на промежутке $(a, b)$ называется совокупность всех первообразных для $f$ на этом промежутке.*

Пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$, причем равенство следует понимать как равенство множеств. Здесь $\int$ — знак интеграла; $f(x)$ — подынтегральная функция; $f(x)dx$ — подынтегральное выражение; $dx$ — дифференциал; $F(x)$ — любая из первообразных для $f(x)$ на $(a, b)$; $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная.

### Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$
2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$
3. $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$ для любых $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, при условии, что оба интеграла в правой части существуют, поскольку если $F$ и $G$ — первообразные для функций $f$ и $g$ соответственно, то $\alpha F + \beta G$ — первообразная для функции $\alpha f + \beta g$.

### Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C.$
2. $\int 1dx = x + C.$
3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad x > 0.$
4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0.$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad x \in (-1, 1).$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$, для знака «$-$»: $|x| > 1$.

    Проверим, напимер, для знака «$-$» при $x < -1$:

    $$(\ln |x+\sqrt{x^2-1}|)' = (\ln(-x-\sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{-x-\sqrt{x^2-1}} \left(-1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

12. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C.$

13. $\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C, \quad x \neq \pm 1.$

    Проверим для случая $x < -1$:

    $$\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)' = \left(\frac{1}{2} \ln \left( \frac{-x+1}{-x-1} \right) \right)' =$$

    $$= \frac{1}{2} \left( (\ln(1-x))' - (\ln(-x-1))' \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{1-x} - \frac{-1}{-x-1} \right) = \frac{1}{x^2-1}.$$

14. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

15. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

16. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$

17. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0.$

Кроме того, полезно запомнить еще 4 интеграла (считаем параметр $a > 0$):

1. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

2. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad x \neq \pm a.$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad x \in (-a,a).$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$, для знака «$-$»: $|x| > a$.

### Основные методы интегрирования

Существуют два метода интегрирования, которые можно применять к широким классам функций — метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

**Теорема 2** (Замена переменной). *Пусть функция $\varphi$ отображает промежуток $(\alpha,\beta)$ на промежуток $(a,b)$ и дифференцируема в каждой точке $t \in (\alpha,\beta)$. Если функция $f$, определенная на $(a,b)$, имеет на этом промежутке первообразную $F$, то функция $f(\varphi)\cdot\varphi'$ имеет первообразную на $(\alpha,\beta)$, причем*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

*Доказательство.* Функция $F(\varphi(t))$ дифференцируема на $(\alpha,\beta)$ как композиция дифференцируемых функция, причем $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, поскольку $F$ — первообразная для $f$ на $(a,b)$, а функция $\varphi$ переводит $(\alpha,\beta)$ в $(a,b)$. Следовательно, $F(\varphi)$ — первообразная для $f(\varphi)\cdot\varphi'$ на $(\alpha,\beta)$. □

**Пример.** Вычислим интеграл $\int\sqrt{1-x^2}dx$. Очевидно, что подынтегральная функция определена на отрезке $[-1,1]$. Сделаем замену: $x = \varphi(t) = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\varphi'(t) = \cos t$, следовательно,

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\cos^2 t dt = \int\frac{1+\cos(2t)}{2}dt =$$

(извлекли корень со знаком «+», поскольку $\cos t \geqslant 0$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$)

$$= \frac{1}{2}\left(\int 1dt + \int\cos(2t)dt\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t) + C\right) = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t + C) =$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + C).$$

**Теорема 3** (Интегрирование по частям). *Пусть функции $u$, $v$ определены и дифференцируемы на промежутке $(a,b)$. Если на этом промежутке существует первообразная для функции $u'\cdot v$, то на нем существует и первообразная для $u\cdot v'$, причем*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \tag{1}$$

*Формула (1) называется формулой интегрирования по частям. Коротко ее можно записать в виде*

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

*Доказательство.* Функция $uv$ дифференцируема на $(a, b)$ как произведение дифференцируемых функций, и ее производная $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ для любого $x \in (a, b)$. Следовательно,

$$\int u(x)v'(x)dx$$

□

**Пример.** Вычислим интеграл $\int x \ln x dx$. Положим $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$. Тогда $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Значит,

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

## Интегрирование рациональных дробей

**Определение 3.** *Рациональной дробью называется выражение вида* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ *— многочлены. Если степень многочлена* $P(x)$ *меньше степени многочлена* $Q(x)$, *то дробь называется правильной, в противном случае — неправильной.*

**Замечание 1.** *Легко видеть, что любую неправильную рациональную дробь вида* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *можно представить в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

*где* $T(x)$ *— многочлен, а* $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь. Таким обрзом, вопрос интегрирования произвольных рациональных дробей фактически сводится к вопросу об интегрировании правильных рациональных дробей (поскольку интегрирование многочленов не представляет никаких технических трудностей).*

Всюду в дальнейшем в этом разделе полагаем, что $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь. Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что коэффициент при старшей степени многочлена $Q(x)$ равен 1. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся два факта из теории многочленов с вещественными коэффициентами.

**Теорема 4** (следствие из основной теоремы алгебры)**.** *Пусть* $Q(x)$ *— многочлен степени* $n$, *причем коэффициент при старшей степени равен* 1. *Тогда многочлен* $Q(x)$ *может быть представлен в виде*

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \dots (x^2+p_jx+q_j)^{l_j}, \quad (2)$$

*где* $k_1, \dots k_i, l_1, \dots l_j \in \mathbb{N}$, $k_1+\dots+k_i+2l_1+\dots+2l_j = n$; $\alpha_1, \dots, \alpha_i, p_1, \dots, p_j, q_1, \dots, q_j \in \mathbb{R}$; $q_1 - \dfrac{p_1^2}{4} > 0, \dots q_j - \dfrac{p_j^2}{4} > 0.$

**Теорема 5** (о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших)**.** *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь, причем многочлен* $Q(x)$ *допускает представление* (2)*. Тогда дробь может быть разложена в сумму простейших дробей:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-\alpha_1} + \frac{A_1^2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_1^{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_2^1}{x-\alpha_2} + \frac{A_2^2}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_2^{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} +$$
$$+ \frac{A_i^1}{x-\alpha_i} + \frac{A_i^2}{(x-\alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_i^{k_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}} + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_1^2 x + C_1^2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} +$$
$$+ \dots + \frac{B_1^{l_1} x + C_1^{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{B_2^1 x + C_2^1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_2^2 x + C_2^2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \dots + \frac{B_2^{l_2} x + C_2^{l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} +$$
$$+ \frac{B_j^1 x + C_j^1}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_j^2 x + C_j^2}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{B_j^{l_j} x + C_j^{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}, \tag{3}$$

*где коэффициенты* $A_1^1, \dots, A_i^{k_i}, B_1^1, \dots, B_j^{l_j}, C_1^1, \dots, C_j^{l_j}$ *— вещественные числа, которые могут быть найдены однозначно путем приведения правой части равенства* (3) *к общему знаменателю и приравниванию затем у числителей коэффициентов при соответствующих степенях переменной (метод неопределенных коэффициентов).*

**Пример.** Разложим дробь $\dfrac{1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$ в сумму простейших. Прежде всего, заметим, что многочлен $Q(x) = x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ имеет корень $-1$ кратности 2, следовательно, его можно разложить на множители: $x^4+2x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)^2(x^2+1)$. Теперь запишем разложение дроби с неопределенными коэффициентами в сумму простейших:

$$\frac{1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^2+B+Cx^3+2Cx^2+Cx+Dx^2+2Dx+D}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Поскольку знаменатели в левой и правой частях последнего равенства совпадают, то должны совпадать и числители. Известно, что два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые коэффициенты при всех степенях переменной. Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ A+B+2C+D=0, \\ A+C+2D=0, \\ A+B+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-A, \\ -A+B=0, \\ D=0, \\ A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-1/2, \\ B=1/2, \\ D=0, \\ A=1/2. \end{cases}$$

Окончательно имеем:

$$\frac{1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Из теоремы о разложении дроби на простейшие вытекает, что нам достаточно научиться интегрировать дроби четырех типов. Покажем, какие методы применяются в каждом из случаев.

I. $\int \dfrac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + C$;

II. $\int \dfrac{A}{(x-\alpha)^m}dx = \dfrac{A}{(1-m)(x-\alpha)^{m-1}} + C$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$;

III. $\int \dfrac{Bx+D}{x^2+px+q}dx$, $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$. Выделим в числителе скобку, равную производной знаменателя, а затем разложим на два интеграла:

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p) - \frac{Bp}{2} + D}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx +$$

$$+ \left(D - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}I_1 + \left(D - \frac{Bp}{2}\right)I_2.$$

Вычислим каждый из интегралов в правой части по отдельности. В интеграле $I_1$ сделаем замену переменной: $t = x^2+px+q$, тогда $(2x+p)dx = dt$, следовательно

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+px+q) + C$$

(модуль под знаком логарифма можно убрать, поскольку выражение $x^2+px+q$ представляет собой квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом и положительным коэффициентом при старшей степени, следовательно, принимает только положительные значения). В интеграле $I_2$ выделим полный квадрат в знаменателе:

$$I_2 = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx = (\,\text{замена}\, t = x + \frac{p}{2}, dx = dt, \text{ обозначим}\, a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0) =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2D-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

IV. $\int \dfrac{Bx+D}{(x^2+px+q)^m}dx$, $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Вычисление интегралов этого типа является наиболее трудоемким. Прежде всего заметим, что преобразованиями, аналогичными описанным выше, интеграл может быть приведен к виду

$$\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{B}{2}I_1 + \left(D - \frac{Bp}{2}\right)I_2,$$

где $I_1 = \int \dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}dx$, $I_2 = \int \dfrac{1}{(x^2+px+q)^m}dx$. Далее, в интеграле $I_1$ снова делаем замену переменной $t = x^2+px+q$, тогда $(2x+p)dx = dt$, следовательно

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^m} = \frac{1}{(1-m)t^{m-1}} + C = \frac{1}{(1-m)(x^2+px+q)^{m-1}} + C.$$

Интеграл $I_2$ более сложен для нахождения. Приведем два альтернативных способа его вычисления. Сначала преобразуем его к виду $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$, где $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$.

*Рекуррентные формулы.* Сделаем преобразование подынтегральной функции и разложим исходный интеграл на два. Для удобства обозначим исходный интеграл через $I(m)$, подчеркнув его зависимость от натурального параметра $m \geqslant 2$:

$$I(m) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^m}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^m}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}I(m-1) - \frac{1}{a^2}J(m), \quad J(m) = \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^m}dt.$$

В интеграле $J(m)$ проведем интегрирование по частям, положив $u(t) = t$, $v'(t) = \frac{t}{(t^2+a^2)^m}$. Получим, что $u'(t) = 1$, $v(t) = \frac{1}{(2-2m)(t^2+a^2)^{m-1}}$. Следовательно,

$$J(m) = \frac{t}{(2-2m)(t^2+a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2-2m}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}} = \frac{t}{(2-2m)(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{I(m-1)}{2m-2}.$$

Подставим полученный результат в выражение для $I(m)$, получим окончательно

$$I(m) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{2m-3}{a^2(2m-2)}I(m-1) - \frac{t}{a^2(2m-2)(t^2+a^2)^{m-1}}.$$

Таким образом, вычисление интеграла $I(m)$ свелось к вычислению интеграла $I(m-1)$. и так далее, за конечное число шагов приходим к интегралу $I(1) = \int \frac{dt}{t^2+a^2}$, который является табличным.

*Тригонометрическая подстановка.* Сделаем в интеграле $I(m) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ подстановку $t = a\operatorname{tg} z$, тогда $t^2+a^2 = a^2(1+\operatorname{tg}^2 z) = \frac{a^2}{\cos^2 z}$, $dt = \frac{a}{\cos^2 z}dz$. Значит,

$$I(m) = \int \frac{a\cos^{2m} z}{a^{2m}\cos^2 z}dz = \frac{1}{a^{2m-1}}\int \cos^{2m-2} z dz.$$

Поскольку $m \geqslant 2$, то $2m-2$ — положительная четная степень, и дальше можно применять формулы понижения степени для тригонометрических функций.

**Примеры.** Вычислим интеграл $I = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ обоими способами.

1)

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}dx =$$

$(u(x) = x$, $v'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, следовательно, $u'(x) = 1$, $v(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)})$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

2) Сделаем подстановку $x = \operatorname{tg} z$, тогда $dx = \dfrac{dz}{\cos^2 z}$, следовательно,

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{\cos^4 z}{\cos^2 z}dz = \int \cos^2 z dz = \int \frac{1+\cos(2z)}{2}dz = \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} + C =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{\operatorname{tg} z}{2(1+\operatorname{tg}^2 z)} + C = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

Естественно, ответы, полученные первым и вторым способом, совпадают.

### Метод Остроградского

Опишем еще один метод интегрирования рациональных дробей, который позволяет избежать необходимости интегрировать дроби вида $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^m}$, $m \geqslant 2$.

**Теорема 6** (Остроградский; без доказательства)**.** *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь, причем знаменатель может быть представлен в виде* (2)*. Тогда*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{T(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{R(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{4}$$

*где*

$$Q_1(x) = (x-\alpha_1)^{k_1-1}(x-\alpha_2)^{k_2-1}\dots(x-\alpha_i)^{k_i-1}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\dots(x^2+p_jx+q_j)^{l_j-1},$$

$$Q_2(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_i)(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\dots(x^2+p_jx+q_j),$$

$T(x)$, $R(x)$ *— многочлены с вещественными коэффициентами такие, что дроби* $\dfrac{T(x)}{Q_1(x)}$ *и* $\dfrac{R(x)}{Q_2(x)}$ *являются правильными. Коэффициенты многочленов* $T(x)$ *и* $R(x)$ *находятся однозначно методом неопределенных коэффициентов после дифференцирования равенства* (4) *(в методе неопределенных коэффициентов следует положить* $degT(x) = degQ_1(x)-1$, $degR(x) = degQ_2(x)-1$*).*

**Пример.** Применим метод Остроградского для интегрирования дроби $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$. Согласно формуле (4)

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \int \frac{cx+e}{x^2+1}dx,$$

поскольку в данном случае $Q_1(x) = Q_2(x) = x^2+1$, $T(x)$ и $R(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени на единицу меньшей, чем у $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ соответственно, то есть первой. Продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} + \frac{cx+e}{x^2+1} = \frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2} + \frac{cx+e}{x^2+1}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители в левой и правой части:

$$1 = -ax^2 - 2bx + a + cx^3 + ex^2 + cx + e.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} c = 0, \\ -a + e = 0, \\ -2b + c = 0, \\ a + e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2, \\ -b = 0, \\ -c = 0, \\ e = 1/2. \end{cases}$$

Значит,

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2(x^2+1)} + \int \frac{1}{2(x^2+1)}dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C.$$

Отметим, что ответ совпал с полученными ранее другими способами.

### Интегрирование некоторых иррациональных выражений

**Определение 4.** *Рациональной функцией двух переменных* $u, v$ *будем называть выражение вида*

$$R(u,v) = \frac{a_{n,0}u^n + a_{n-1,1}u^{n-1}v + \cdots + a_{0,n}v^n + a_{n-1,0}u^{n-1} + \cdots + a_{1,0}u + a_{0,1}v + a_{0,0}}{b_{m,0}u^m + b_{m-1,1}u^{m-1}v + \cdots + b_{0,m}v^m + b_{m-1,0}u^{m-1} + \cdots + b_{1,0}u + b_{0,1}v + b_{0,0}},$$

*где* $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ *— вещественные коэффициенты;* $m, n \in \mathbb{N}$.

Несложно видеть, что если в рациональную функцию $R(u,v)$ вместо переменных $u$ и $v$ подставить рациональные дроби переменной $t$, то после упрощения получим рациональную дробь переменной $t$: $\widetilde{R}(t) = R(u(t), v(t))$. Мы будем часто пользоваться этим соображением. Всюду в дальнейшем под $R(u,v)$ будем понимать именно рациональную функцию переменных $u, v$.

1) *Интегрирование дробно–иррациональных выражений.* Рассмотрим интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — вещественные числа, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Сделаем замену: $t = \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, тогда

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^m, \quad x = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}, \quad dx = \frac{m(\alpha\delta - \gamma\beta)t^{m-1}}{(\alpha - \gamma t^m)^2}dt.$$

После подстановки полученных выражений в исходный интеграл и упрощения получим интеграл от рациональной дроби переменной $t$, который вычислять мы уже умеем.

**Пример.** Вычислим интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \frac{1}{(x-1)^2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2}$$

и сделаем замену $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$. Тогда $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\dfrac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$, и после подстановки получаем:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2} = \int \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^2 t^2} = -\frac{3}{2}\int 1dt = -\frac{3}{2}t + C = -\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right) + C.$$

2) *Интегрирование квадратичных иррациональностей.* Рассматриваются интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, где $a$, $b$, $c$ — вещественные коэффициенты. Есть два основных способа интегрирования такого типа выражений.
I. *Подстановки Эйлера.* а) Если $a > 0$, то делаем подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$, где $t$ — новая переменная. Знак перед корнем $\sqrt{a}$ может быть выбран любым. Получаем, что

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2, \quad x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}t}, \quad dx = \frac{t^2 \mp \frac{b}{\sqrt{a}}t + c}{\mp 2\sqrt{a}\left(t \mp \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}dt.$$

После подстановки полученных выражений в исходный интеграл и упрощения получим интеграл от рациональной дроби переменной $t$.
б) Если $c > 0$, то можно сделать подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$, тогда

$$ax^2+bx+c = t^2x^2 \pm 2\sqrt{c}tx + c, \quad x = \frac{b \mp 2\sqrt{c}t}{t^2-a}, \quad dx = \frac{\pm 2\sqrt{c}t^2 - 2bt \pm a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}dt.$$

Подставляем все в исходный интеграл, упрощаем, получаем интеграл от рациональной дроби переменной $t$.
в) Если квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ имеет вещественные корни $\alpha$ и $\beta$ ($\alpha \neq \beta$, иначе под корнем стоит полный квадрат и иррациональность «исчезает»), то делаем подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$, где $t$ — новая переменная, а в качестве $\alpha$ может быть выбран любой из корней квадратного трехчлена. Получим

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) = t^2(x-\alpha)^2, \quad x = \frac{\alpha t^2 - \beta a}{t^2-a}, \quad dx = \frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Подставляем все в исходный интеграл, упрощаем, получаем интеграл от рациональной дроби переменной $t$.

**Замечание 2.** *Заметим, что одна из подстановок Эйлера применима всегда. Действительно, если $a < 0$ и квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ не имеет вещественных корней, то он принимает отрицательные значения при любом вещественном $x$, а значит, корень из него нигде не определен.*

**Пример.** Вычислим интеграл $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. В данном случае $a = b = c = 1$, следовательно, применимы первая и вторая из подстановок Эйлера. Сделаем первую, выбрав для удобства знак «$-$»: $\sqrt{x^2+x+1} = -x + t$, тогда

$$t = x + \sqrt{x^2+x+1}, \quad x = \frac{t^2-1}{1+2t}, \quad dx = \frac{t^2+t+1}{2(t+\frac{1}{2})^2}dt.$$

Подставим в исходный интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{t^2+t+1}{2t(t+\frac{1}{2})^2}dt.$$

Разложим полученную рациональную дробь на простейшие, применив метод неопределенных коэффициентов

$$\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+\frac{1}{2}} + \frac{C}{(t+\frac{1}{2})^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получаем систему линейных уравнений на коэффициенты $A$, $B$, $C$, из которой находим: $A = 4$, $B = -3$, $C = -3/2$. Значит,

$$\int \frac{t^2+t+1}{2t(t+\frac{1}{2})^2}dt = 2\int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln\left|t+\frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4t+2} + C$$

Окончательно получаем, что $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^4}{|t+\frac{1}{2}|^3}\right) + \frac{3}{4t+2} + C$, где $t = x+\sqrt{x^2+x+1}$.

II. *Тригонометрические и гиперболические подстановки.* Видно, что подстановки Эйлера обычно приводят к достаточно громоздким вычислениям. Иногда удобнее пользоваться тригонометрическими или гиперболическими подстановками. Для этого нужно выделить в выражении $ax^2+bx+c$ полный квадрат:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = at^2+d, \quad \text{где} \quad t = x+\frac{b}{2a},\, d = c-\frac{b^2}{4a}.$$

Далее возможны следующие варианты:

а) $a>0$, $d>0$. Тогда удобно сделать подстановку $t=\sqrt{\frac{d}{a}}\operatorname{tg} z$ или $t=\sqrt{\frac{d}{a}}\operatorname{sh} z$.

б) $a>0$, $d<0$. Тогда удобно сделать подстановку $t=\sqrt{\frac{-d}{a}}\operatorname{ch} z$.

в) $a<0$, $d>0$. Тогда удобно сделать подстановку $t=\sqrt{\frac{d}{-a}}\sin z$ или $t=\sqrt{\frac{d}{-a}}\cos z$.

г) $a<0$, $d<0$. Тогда подкоренное выражение отрицательно при всех значениях $t$ и корень нигде не определен (мы работаем только с вещественными числами!).

**Пример.** Вычислим интеграл $\int x\sqrt{x^2-2x+2}$. Представим подкоренное выражение в виде $(x-1)^2+1$ и сделаем подстановку $x-1=\operatorname{sh} z$. Тогда $\sqrt{(x-1)^2+1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 z+1} = \operatorname{ch} z$, $dx = \operatorname{ch} z dz$, следовательно,

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2} = \int(\operatorname{sh} z+1)\operatorname{ch}^2 z dz = \int \operatorname{ch}^2 z d\operatorname{ch} z + \int \operatorname{ch}^2 z dz = \frac{\operatorname{ch}^3 z}{3} +$$

$$+\frac{1}{2}\int(1+\operatorname{ch}(2z))dz = \frac{\operatorname{ch}^3 z}{3} + \frac{z}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2z)}{4} + C, \quad z = \operatorname{arsh}(x-1) = \ln(x-1+\sqrt{x^2-x+2}).$$

3) *Интегрирование дифференциальных биномов.* Рассматриваются интегралы вида $J = \int x^m(a+bx^n)^p dx$, где $a$, $b$ — вещественные числа, отличные от нуля, $m$, $n$, $p$ — рациональные числа. Для нахождения интегралов такого типа применяются *подстановки*

*Чебышёва*, а именно
а) если $p \in \mathbb{Z}$, то делаем подстановку $x = t^N$, где $N$ — общий знаменатель дробей $m$ и $n$. Получаем, что $dx = Nt^{N-1}$, следовательно

$$J = \int t^{mN}(a + bt^{nN})^p N t^{N-1} dt = \int R(t)dt,$$

где $R(t)$ — рациональная дробь переменной $t$, поскольку все показатели степеней переменной $t$ являются целыми в силу выбора числа $N$.
б) Если $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то делаем подстановку $a + bx^n = t^N$, где $N$ — знаменатель дроби $p$. Получаем, что $x = \left(\dfrac{t^N - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $dx = \dfrac{N}{bn}\left(\dfrac{t^N - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} t^{N-1}dt$, следовательно,

$$J = \int \left(\frac{t^N - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} t^{Np} \cdot \frac{N}{bn}\left(\frac{t^N - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} t^{N-1}dt = \frac{N}{bn}\int t^{Np+N-1}\left(\frac{t^N - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dt = \int R(t)dt,$$

поскольку все показатели снова являются целыми в силу выбора числа $N$ и условия на числа $m$ и $n$.
в) Наконец, если $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то применяем подстановку $ax^{-n} + b = t^N$, где $N$ — знаменатель дроби $p$. Получаем, что $x = \left(\dfrac{t^N - b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}$, $dx = -\dfrac{N}{an}\left(\dfrac{t^N - b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}-1} t^{N-1}dt$, следовательно,

$$J = \int \left(\frac{t^N - b}{a}\right)^{-\frac{m}{n}} \left(\frac{at^N}{t^N - b}\right)^p \left(-\frac{N}{an}\right)\left(\frac{t^N - b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}-1} t^{N-1}dt =$$

$$= -\frac{N}{an}\int t^{Np+N-1}\left(\frac{t^N - b}{a}\right)^{-\frac{m+1}{n}-p-1} dt = \int R(t)dt,$$

так как все показатели являются целыми в силу выбора числа $N$ и условия на числа $m$, $n$ и $p$.

**Теорема 7** (Чебышёв; без доказательства)**.** *Если числа $a$ и $b$ отличны от нуля, и ни одно из условий а) — в) на показатели $m$, $n$, $p$ не имеет места, то первообразная функции $x^m(a + bx^n)^p$ не является элементарной функцией.*

**Пример.** Вычислим интеграл $J = \int \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}}dx$. В данном случае $a = b = 1$, $m = -\dfrac{11}{5}$, $n = \dfrac{4}{5}$, $p = \dfrac{1}{2}$. Получаем, что $\dfrac{m+1}{n} + p = -\dfrac{3}{2}$, следовательно, $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ и нужно применять третью подстановку Чебышёва:

$$1 + x^{-\frac{4}{5}} = t^2, \quad x = (t^2 - 1)^{-\frac{5}{4}}, \quad dx = -\frac{5}{2}t(t^2 - 1)^{-\frac{9}{4}}dt.$$

Подставляем все в исходный интеграл, получаем

$$J = -\frac{5}{2}\int (t^2 - 1)^{\frac{11}{4}}(1 + (t^2 - 1)^{-1})^{\frac{1}{2}} t(t^2 - 1)^{-\frac{9}{4}}dt = -\frac{5}{2}\int t^2 dt =$$

$$= -\frac{5t^3}{6} + C = -\frac{5}{6}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}}\right)^3 + C = -\frac{5\sqrt{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{6x\sqrt[5]{x}} + C.$$

### Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

Рассмотрим некоторые типы интегралов от тригонометрических функций, которые подходящими заменами сводятся к интегралам от рациональных дробей новой переменной.
1) Интегралы вида $T = \int \sin^n x \cos^m x dx$, где $m$, $n \in \mathbb{Z}$. Возможны различные подстановки в зависимости от четности $m$ и $n$:
а) $m$ — нечетное. Тогда делаем замену $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, следовательно,

$$T = \int \sin^n x \cos^{m-1} x \cos x dx = \int t^n (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt = \int R(t)dt,$$

поскольку степень $\dfrac{m-1}{2}$ —целая.
б) $n$ — нечетное. Замена $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$, следовательно

$$T = \int \sin^{n-1} x \cos^m x \sin x dx = -\int (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} t^m dt = \int R(t)dt.$$

в) $m+n$ — четное. Тогда можно сделать подстановку $\operatorname{tg} x = t$ (применяется на интервалах, не содержащих точек вида $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) или $\operatorname{ctg} x = t$ (применяется на интервалах, не содержащих точек вида $\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Пусть, например, $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, следовательно

$$T = \int \frac{\operatorname{tg}^n x \cos^{m+n+2} x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{t^n dt}{(1+t^2)^{\frac{m+n}{2}+1}} = \int R(t)dt,$$

поскольку степень $\dfrac{m+n}{2} + 1$ является целой. Очевидно, что хотя бы один из случаев а) — в) всегда реализуется.
2) Интегралы вида $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$ могут быть сведены к интегрированию рациональной дроби *универсальной тригонометрической подстановкой* $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$ (применяется на интервалах, не содержащих точек вида $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Из тригонометрических формул двойного угла следует, что $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Кроме того, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, следовательно, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. После подстановки в исходный интеграл и упрощения получаем интеграл от рациональной дроби переменной $t$.

**Пример.** Вычислим интеграл $I = \int \dfrac{dx}{\cos x + \sin x + 1}$. Сделаем универсальную тригонометрическую подстановку, получим

$$I = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1\right)} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right| + C.$$

**Замечание 3.** *Универсальная тригонометрическая подстановка имеет тот недостаток, что, вообще говоря, ее применение «удваивает» степени: первой степени функций* $\sin x$ *и* $\cos x$ *соответствует выражение, содержащее вторую степень переменной* $t$*.*

В некоторых частных случаях этой проблемы можно избежать, сделав более «подходящие» замены, а именно:
а) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\sin x = t$ приводит к интегралу от рациональной функции переменной $t$ (частный случай этой ситуации: $R(\sin x, \cos x) = \sin^n x \cos^m x$, где $m$ — нечетное).
б) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ приводит к интегралу от рациональной функции переменной $t$ (частный случай : $R(\sin x, \cos x) = \sin^n x \cos^m x$, где $n$ — нечетное).
в) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\operatorname{tg} x = t$ приводит к интегралу от рациональной функции переменной $t$ (частный случай : $R(\sin x, \cos x) = \sin^n x \cos^m x$, где $n + m$ — четное).

**Пример.** Вычислим интеграл $I = \int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$. Универсальная тригонометрическая подстановка приведет здесь к интегралу от рациональной дроби, знаменатель которой будет иметь шестую степень. Заметим, однако, что подынтегральная функция не меняет знак при одновременной смене знаков функций $\sin x$ и $\cos x$. Значит, можно сделать подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Получаем, что $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, следовательно,

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^3 x + 1} dx = \int \frac{t(t^2+1)}{(t^3+1)(1+t^2)} dt = \int \frac{t dt}{t^3+1}.$$

Разложим дробь $\dfrac{t}{t^3+1}$ на простейшие:

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{At^2 - At + A + Bt^2 + Bt + Ct + C}{t^3+1},$$

откуда $A = -\dfrac{1}{3}$, $B = C = \dfrac{1}{3}$. Значит,

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt = -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1} =$$

$$-\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{6}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{1 - \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sin x - \cos x}{\sqrt{3}\cos x} + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + e \cos x} dx$, где $a$, $b$, $c$, $e$ — вещественные коэффициенты, $ae \neq bc$, можно также вычислять без применения универсальной тригонометрической подстановки. Для этого следует заметить, что числитель дроби можно представить в виде:

$$a \sin x + b \cos x = A(c \sin x + e \cos x) + B(c \cos x - e \sin x), \quad \text{где} \quad A = \frac{ac+be}{e^2+c^2},\ B = \frac{bc-ae}{e^2+c^2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + e\cos x}dx = A\int 1dx + B\int \frac{(c\sin x + e\cos x)'}{c\sin x + e\cos x}dx = Ax + B\ln|c\sin x + e\cos x| + C.$$

**Пример.** Вычислим интеграл $\int \frac{\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}dx$. Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и производной знаменателя:

$$-2\sin x + \cos x = A(3\sin x + 2\cos x) + B(3\cos x - 2\sin x).$$

Приравняем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получим, что $3A - 2B = -2$, $2A + 3B = 1$. Отсюда $A = -\frac{4}{13}$, $B = \frac{7}{13}$. Значит,

$$\int \frac{\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}dx = -\frac{4}{13}\int 1dx + \frac{7}{13}\int \frac{(3\cos x - 2\sin x)dx}{3\sin x + 2\cos x} = -\frac{4x}{13} + \frac{7}{13}\ln|3\sin x + 2\cos x| + C.$$

### Интегрирование некоторых трансцендентных выражений

Интегралы вида $\int f(x)P(x)dx$, где $P(x)$ — многочлен, а $f(x)$ — одна из функций $\sin x$, $\cos x$, $a^x$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, вычисляются с помощью интегрирования по частям. При этом, если $f(x)$ — это $\sin x$, $\cos x$ или $a^x$, то нужно взять $u(x) = P(x)$, $v'(x) = f(x)$. Если же $f(x)$ — это $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$ или $\arccos x$, то следует выбрать $u(x) = f(x)$, $v'(x) = P(x)$.

**Примеры.** 1) Рассмотрим интеграл $\int x^2 \ln x dx$. Положим $u(x) = \ln x$, $P(x) = x^2$, тогда $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{x^3}{3}$, следовательно

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x}dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$$

2) Вычислим интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$. Положим $u(x) = \operatorname{arctg} x$, $v'(x) = 1$. Тогда $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $v(x) = x$. Значит,

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

3) Рассмотрим интеграл $\int x\arcsin x dx$. Можно действовать двумя способами. Положим вначале $u(x) = \arcsin x$, $v'(x) = x$. Тогда $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$. Значит,

$$\int x\arcsin x dx = \frac{x^2\arcsin x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^2\arcsin x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \frac{x^2\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^2\arcsin x}{2} + \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} -$$

$$-\frac{\arcsin x}{2}+C=\frac{x^2\arcsin x}{2}-\frac{\arcsin x}{4}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C.$$

(воспользовались значением интеграла $\int\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{\arcsin x}{2}+\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$, который мы вычисляли ранее). Видим, что выкладки получились не слишком простыми, к тому же пришлось использовать ранее вычисленный интеграл.

Гораздо удобнее сделать в исходном интеграле замену: $\arcsin x=t$, тогда $x=\sin t$, $dx=\cos tdt$, следовательно, $\int x\arcsin xdx=\int t\sin t\cos tdt=\dfrac{1}{2}\int t\sin(2t)dt$. Положим теперь $u(t)=t$, $v'(t)=\sin(2t)$, тогда $u'(t)=1$, $v(t)=-\dfrac{1}{2}\cos(2t)$. Значит,

$$\int x\arcsin xdx=-\frac{t}{4}\cos(2t)+\frac{1}{4}\int\cos(2t)dt=-\frac{t}{4}\cos(2t)+\frac{1}{8}\sin(2t)+C=$$

$$=-\frac{\arcsin x}{4}(1-2x^2)+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C=\frac{x^2\arcsin x}{2}-\frac{\arcsin x}{4}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C.$$

4) Рассмотрим еще один тип интегралов, для вычисления которых применяется специальный прием. Речь идет об интегралах вида $\int a^{\alpha x}\sin(\beta x)dx$ или $\int a^{\alpha x}\cos(\beta x)dx$. Поясним на примере. Вычислим интеграл $I=\int e^x\sin xdx$. Запишем цепочку преобразований, применяя метод интегрирования по частям:

$$I=\int\sin x(e^x)'dx=e^x\sin x-\int e^x(\sin x)'dx=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-$$

$$-\int\cos x(e^x)'dx=e^x\sin x-e^x\cos x+\int e^x(\cos x)'dx=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx.$$

Таким образом, мы получили уравнение $I=e^x(\sin x-\cos x)-I$. Естественно, интеграл $I$ определен с точностью до произвольной постоянной. Если мы из множества всех первообразных для функции $f(x)=e^x\sin x$ выберем какую-то конкретную и обозначим ее через $F(x)$, то из уравнения будет следовать, что

$$F(x)=e^x(\sin x-\cos x)-F(x)+C_0,$$

где $C_0$ — некоторая постоянная (зависит от выбора первообразной $F(x)$). Таким образом, $F(x)=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+\dfrac{C_0}{2}$, а следовательно,

$$I=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C.$$

## Интегралы, не вычисляющиеся в элементарных функциях

Существуют целые классы элементарных функций, первообразные которых не являются элементарными функциями. Они относятся к так называемым *специальным функциям*. Многие из таких функций имеют широкое применение в различных областях математики, физики и других наук. Они хорошо изучены, построены их графики, существуют подробные таблицы их значений. Так, к элементарным функциям не относятся:

$\int e^{-x^2}dx$ — интеграл Пуассона. Является одной из основных функций в теории вероятности и математической статистике.

$si(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx$ и $ci(x) = \int \frac{\cos x}{x}dx$ — интегральный синус и интегральный косинус. Применяются в теории рядов Фурье.

$li(x) \int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм. Играет важную роль в исследовании распределения простых чисел.

$\int \sin(x^2)dx$ и $\int \cos(x^2)dx$ — интегралы Френеля. Применяются в оптике.

$\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, где $P(x)$ — многочлен степени 3 или 4, — эллиптические интегралы. Как правило, не вычисляются в элементарных функциях. Применяются в различных разделах механики, физики и математики.

Первообразные дифференциальных биномов, за исключением случаев, описанных в теореме Чебышёва, также не являются элементарными функциями.